МОСКОВСКИЙ АВТО-
МОБИЛЬНО-
ДОРОЖНЫЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИ-
ВЕРСИТЕТ (МАДИ)
БРОННИЦКИЙ ФИЛИАЛ



ПРАКТИКУМ

# ОСНОВЫ ИНЖЕНЕРНОГО ТВОРЧЕСТВА

СУФИЯНОВ Р.Ш.

Бронницы 2018

## Содержание

## Практическое применение метода линейного программирования

Математические методы оптимизации относятся к классу *условных экстремальных задач*. Внешне эти методы отличаются от постановки обычных задач поиска экстремума функции лишь тем, что здесь экстремум отыскивается при некоторых ограничениях, *условиях*. Такими ограничениями в этих задачах служат уравнения математической модели системы. Все методы оптимизации можно разделить на две группы: *аналитические и численные.*

Для относительно небольшой части инженерных задач, к которым применимы *аналитические решения*, чаще всего с целью оптимизации применяют метод *неопределенных множителей Лагранжа*. Сущность метода заключается в использовании функции Лагранжа, позволяющей перевести задачу из класса условных экстремальных задач в класс безусловных (метод *поиска экстремума функции*).

Большинство задач оптимизации сводятся к *численным* методам. К таким методам относятся *задачи линейного и нелинейного программирования.*

К линейному программированию относятся задачи оптимизации, когда как ограничения, налагаемые на параметры, так и выражение для критерия оптимальности являются линейными функциями.

В качестве ограничений можно использовать уравнения математической модели объекта.

*Оптимальным значением* параметра называют такое его значение, при котором некоторая вспомогательная функция (*критерий оптимальности)* достигает экстремального значения.

Итак, задачи оптимизации — это условные экстремальные задачи, в которых находят экстремум при некоторых ограничениях (условиях).

Задача оптимизации считается *задачей линейного программирования*, если:

1) критерий оптимальности $P$ (целевая функция, показатель эффективности) есть линейная функция от параметров $x_j$:

$$P = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \Rightarrow \max, \qquad (9)$$

где $a_j$ — заданные коэффициенты.

2) ограничительные условия, налагаемые на параметры, имеют вид линейных равенств (или неравенств, которые можно привести к равенствам):

$$\left.\begin{array}{ll} \text{1-е ограничение:} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ m\text{-е ограничение:} & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \qquad (10)$$

где $n$ — число параметров,
$m$ - число ограничений.

Эти условия справедливы только в том случае, если

$$x_j \geq 0. \qquad (11)$$

Уравнение (9) и система уравнений (10) вместе с условием (11) представляют *стандартную форму*, или *основную задачу линейного программирования*:

> Найти неотрицательные значения параметров $x_j$ (11), которые удовлетворяли бы ограничениям-равенствам (10) и обращали в максимум функцию (9).

Задача линейного программирования имеет смысл и бесконечное множество решений только в том случае, когда число неизвестных (число параметров) больше числа ограничений:

$$(n - m) \geq 1,$$

т.е. в оптимизационных задачах число переменных всегда больше числа ограничений.

## З А Д А Ч А

У с л о в и е

Критерий оптимальности задан в следующем виде:

$$P = x_1 + x_2 \Rightarrow \max.$$

Ограничительные условия, налагаемые на параметры, заданы неравенствами:

$$\left.\begin{aligned} 0{,}2\,x_1 + 0{,}1\,x_2 &\le 0{,}1 \\ 0{,}1\,x_1 + 0{,}2\,x_2 &\le 0{,}1. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Найти, при каких оптимальных значениях параметров $x_1$ и $x_2$ критерий оптимальности $P$ будет максимальным.

Р е ш е н и е

Переведем исходные неравенства в равенства. Для этого необходимо ввести дополнительные переменные $x_3$ и $x_4$.

В результате получим систему уравнений 1*, 2* с числом уравнений (ограничений) $m = 2$ и числом неизвестных параметров $n = 4$, при условии, $x_j \ge 0$:

$$\left.\begin{aligned} 0{,}2\,x_1 + 0{,}1\,x_2 + x_3 &= 0{,}1 \qquad (1^*) \\ 0{,}1\,x_1 + 0{,}2\,x_2 + x_4 &= 0{,}1. \qquad (2^*) \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Эту задачу линейного программирования можно решать аналитическим или графическим способом.

Г р а ф и ч е с к о е  р е ш е н и е  з а д а ч и

На фазовой плоскости переменных $x_1$, $x_2$ представим область допустимых решений (ОДР) основной задачи линейного программирования, ограниченную условиями (12), или, что то же самое, (13) — при $x_3 = x_4 = 0$, $x_j \ge 0$.

Запишем систему уравнений (13) в более удобном виде:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 10x_3 &= 1 \qquad (1^*) \\ x_1 + 2x_2 + 10x_4 &= 1. \qquad (2^*) \end{aligned}\right\}$$

Построим прямые, соответствующие этим уравнениям:

1) Из (1*) имеем: $x_3 = 0$; $2x_1 + x_2 = 1$; $x_2 = 1 – 2x_1$.

Координаты точек для построения прямой: $x_2 = 0$, $x_1 = 0{,}5$ и $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

2) Из (2*): $x_4 = 0$; $x_1 + 2x_2 = 1$; $x_1 = 1 – 2x_2$.

Координаты точек для построения прямой: $x_1 = 0$, $x_2 = 0{,}5$ и $x_2 = 0$, $x_1 = 1$.

Проведем прямые и обозначим вершины четырехугольника: A, B, C, D.

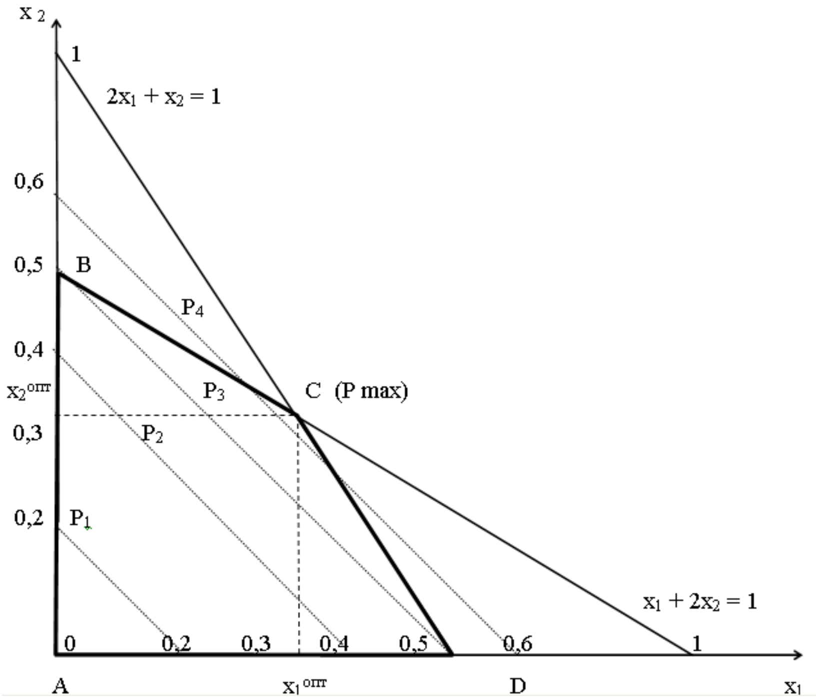


Рис. 1. Графическое решение задачи

Область ABCD, в которой находятся неотрицательные значения параметров, и будет областью допустимых решений (ОДР) (рис. 1).

3) Далее необходимо рассмотреть целевую функцию

$$P = x_1 + x_2 \Rightarrow \max.$$

Выразим: $x_1 = P - x_2$.

4) В пределах ОДР проведем линию, соответствующую произвольно выбранному значению функции. Допустим, $P_1$ = 0,2. Эта линия называется *изолинией*, линией постоянства критерия оптимальности.

Координаты точек: $x_2$ = 0, $x_1$ = 0,2; $x_1$= 0, $x_2$ = 0,2.

5) Зададим $P_2$ = 0,4 и построим следующую изолинию.

6) Зададим $P_3$ = 0,5 и построим третью изолинию.

Очевидно, что целевая функция возрастает и если передвигать изолинии дальше, то одна из этих изолиний ($P_4$) пройдёт через вершину С В этой точке и будет максимальное значение целевой функции: $x_1$ = 1/3 = 0,333, $x_2$ = 1/3 = 0,333 при $P$ = 2/3 = 0,666.

Аналитическое решение задачи

Аналитическое решение задачи достигается перебором базисных решений.

Пусть математическая модель содержит $n$ независимых линейных уравнений, включающих $m$ параметров (режимных и конструктивных): $x_1$, $x_2$, …, $x_m$. В задачах оптимизации $m > n$, а разность $k = m - n$ определяет число свободных (варьируемых) параметров. Если из числа $m$ зафиксировать любые $k$ параметров, принятых в качестве свободных, то систему уравнений можно разрешить однозначно. Решения, где свободные переменные приравниваются нулю, а другие переменные из $m$ параметров принимают неотрицательные значения, называются *базисными решениями*. Решение задачи линейного программирования лежит в базисной области.

Исходная система уравнений имеет ограниченное множество базисных решений. Например, в нашем случае при $n$= 4, $m$ = 2 и $k$ = 4 – 2 = 2 существуют следующие шесть базисных решений: $x_1$=0, $x_2$=0; $x_1$=0, $x_3$=0; $x_1$=0, $x_4$=0; $x_2$=0, $x_3$=0; $x_2$=0, $x_4$=0; $x_3$=0, $x_4$=0.

Доказано, что оптимальное решение в задачах линейного программирования следует искать среди базисных решений.

Поиск проводят перебором всех базисных решений для выбора из всех параметров $x$ одного параметра — с экстремальным значением критерия оптимальности.

Таблица 2

| Свободные переменные | | Базисные переменные | | ПЭ $P = x_1 + x_2$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1 = 0$ | $x_2 = 0$ | $x_3 = 1/10$ | $x_4 = 1/10$ | $P = 0$ |
| $x_1 = 0$ | $x_3 = 0$ | $x_2 = 1$ | $x_4 = 1/10$ | $P = 1$ |
| $x_1 = 0$ | $x_4 = 0$ | $x_2 = 1/2$ | $x_3 = 1/20$ | $P = 1/2$ |
| $x_2 = 0$ | $x_3 = 0$ | $x_1 = 1/2$ | $x_4 = 1/20$ | $F = 1/2$ |
| $x_2 = 0$ | $x_4 = 0$ | $x_1 = 1$ | $x_3 = –1/10$ | $P = 1$ |
| $x_3 = 0$ | $x_4 = 0$ | $x_1 = 1/3$ | $x_2 = 1/3$ | $P = 2/3$ |

## Библиографический список

1. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Валощенко А.Б. Математическое программирование. — М.: Высшая школа, 1976. 352с.

2. Ларин Р. М., Плясунов А. В., Пяткин А. В. Методы опти мизации. Примеры и задачи. —Учебное пособие. Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 2003. 120 с.

## Варианты заданий

**В 1**

Целевая функция $P = 8x_1 + 3x_2 \Rightarrow \max$

Ограничительные условия

$x_1 - x_2 \le 4$

$5x_1 + 4x_2 \le 80$

$x_1 + 2x_2 \le 32$

**В 2**

Целевая функция $P = 3x_1 + 10x_2 \Rightarrow \max$

Ограничительные условия

$x_1 - 2x_2 \le 6$

$10x_1 + 7x_2 \le 70$

$x_1 + 2x_2 \le 16$

**В 3**

Целевая функция $P = 5x_1 + 4x_2 \Rightarrow \max$

Ограничительные условия

$x_1 + 2x_2 \le 16$

$10x_1 + 7x_2 \le 70$

$x_1 - 2x_2 \le 4$

**В 4**

Целевая функция $P = 2x_1 + 9x_2 \Rightarrow \max$

Ограничительные условия

$2x_1 - x_2 \le 8$

$10x_1 + 7x_2 \le 70$

$x_1 + 3x_2 \le 24$

**В 5**

Целевая функция $P = x_1 + 9x_2 \Rightarrow \max$

Ограничительные условия

$2x_1 - x_2 \le 10$

$5x_1 + 4x_2 \le 80$

$x_1 + 2{,}3x_2 \le 32$

**В 6**

Целевая функция $P = 7x_1 + 3x_2 \Rightarrow \max$

Ограничительные условия

$x_1 - 2x_2 \le 4$

$5x_1 + 4x_2 \le 40$

$10x_1 + 5x_2 \le 65$

**В 7**

Целевая функция $P = 4x_1 + 9x_2 \Rightarrow \max$

Ограничительные условия

$x_1 - 2x_2 \le 6$

$10x_1 + 9x_2 \le 90$

$x_1 + 2x_2 \le 16$

**В 8**

Целевая функция $P = 8x_1 + 3x_2 \Rightarrow \max$

Ограничительные условия

$x_1 - 2x_2 < 4$

$10x_1 + 7x_2 \le 70$

$x_1 + 2x_2 \le 10$

**В 9**

Целевая функция $P = x_1 + 9x_2 \Rightarrow \max$

Ограничительные условия

$10x_1 + 2x_2 \le 70$

$2x_1 - x_2 > 8$

$x_1 + 3x_2 \le 24$

**В 10**

Целевая функция $P = 10x_1 + 3x_2 \Rightarrow \max$

Ограничительные условия

$5x_1 + 4x_2 \le 48$

$2x_1 - x_2 < 10$

$x_1 + 3x_2 \le 30$

**В 11**

Целевая функция $P = 3x_1 + 7x_2 \Rightarrow \max$

Ограничительные условии

$x_1 - x_2 \le 4$

$5x_1 + 4x_2 \le 80$

$x_1 + 1{,}5x_2 \le 21$

**В 12**

Целевая функция $P = 10x_1 + 4x_2 \Rightarrow \max$

Ограничительные условия

$10x_1 + 7x_2 \le 70$

$x_1 - 2x_2 \le 4$

$x_1 + 2x_2 \le 16$

**В 13**

Целевая функция $P = 4x_1 + 9x_2 \Rightarrow \max$

Ограничительные условия

$10x_1 + 7x_2 \le 70$

$x_1 - 2x_2 \le 4$

$x_1 + 2x_2 \le 16$

**В 14**

Целевая функция $P = 4x_1 + 8{,}5x_2 \Rightarrow \max$

Ограничительные условия

$x_1 + 4x_2 \le 14$

$3x_1 + 4x_2 \le 18$

$6x_1 + 2x_2 \le 27$

**В 15**

Целевая функция $P = x_1 + 8x_2 \Rightarrow \max$

Ограничительные условия

$2x_1 - x_2 \le 10$

$5x_1 + 4x_2 \le 80$

$x_1 + 2x_2 \le 30$

**В 16**

Целевая функция $P = 2x_1 + 9x_2 \Rightarrow \max$

Ограничительные условия

$x_1 - x_2 \leq 4$

$5x_1 + 4x_2 \leq 60$

$x_1 + 1{,}5x_2 \leq 21$

**В 17**

Целевая функция $P = 3x_1 + 10x_2 \Rightarrow \max$

Ограничительные условия

$2x_1 - 2x_2 \leq 6$

$10x_1 + 2x_2 \leq 70$

$x_1 + 4x_2 \leq 45$

**В 18**

Целевая функция $P = 5x_1 + 4x_2 \Rightarrow \max$

Ограничительные условия

$x_1 - 2x_2 \leq 4$

$10x_1 + 7x_2 \leq 70$

$x_1 + 2x_2 \leq 10$

**В 19**

Целевая функция $P = 5x_1 + 4x_2 \Rightarrow \max$

Ограничительные условия

$x_1 + 2x_2 \leq 32$

$10x_1 + 4x_2 \leq 80$

$x_1 - 23x_2 \leq 4$

**В 20**

Целевая функция $P = 3x_1 + 5x_2 \Rightarrow \max$

Ограничительные условия

$x_1 - x_2 \leq 3$

$x_1 + x_2 \leq 10$

$3x_1 + 9x_2 \leq 75$

**В 21**

Целевая функция $P = 5x_1 + 4x_2 \Rightarrow \max$

Ограничительные условия

$x_1 + 2x_2 \le 28$

$10x_1 + 2x_2 \le 52$

$3x_1 - 2x_2 \le 4$

**В 22**

Целевая функция $P = 3x_1 + 7x_2 \Rightarrow \max$

Ограничительные условия

$x_1 - x_2 \le 10$

$5x_1 + 4x_2 \le 90$

$x_1 + 2x_2 \le 40$

**В 23**

Целевая функция $P = 10x_1 + 3x_2 \Rightarrow \max$

Ограничительные условия

$4x_1 + 3x_2 \le 30$

$2x_1 - x_2 \le 10$

$x_1 + 4x_2 \le 24$

**В 24**

Целевая функция $P = 5x_1 + 7x_2 \Rightarrow \max$

Ограничительные условия

$4x_1 + 3x_2 \le 30$

$2x_1 - x_2 \le 8$

$x_1 + 4x_2 \le 24$

**В 25**

Целевая функция $P = 8x_1 + 3x_2 \Rightarrow \max$

Ограничительные условия

$6x_1 - 3x_2 \le 4$

$6x_1 + x_2 \le 40$

$x_1 + 2x_2 \le 40$

## МАТРИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СТРУКТУРЫ ХИМИКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В математическом моделировании, при расчете необходимо уметь представить структуру химико-технологи-ческих систем в виде матрицы чисел. Рассмотрим, как это можно сделать, на примере системы «абсорбер—десорбер» и процесса извлечения компонента из газовой смеси.

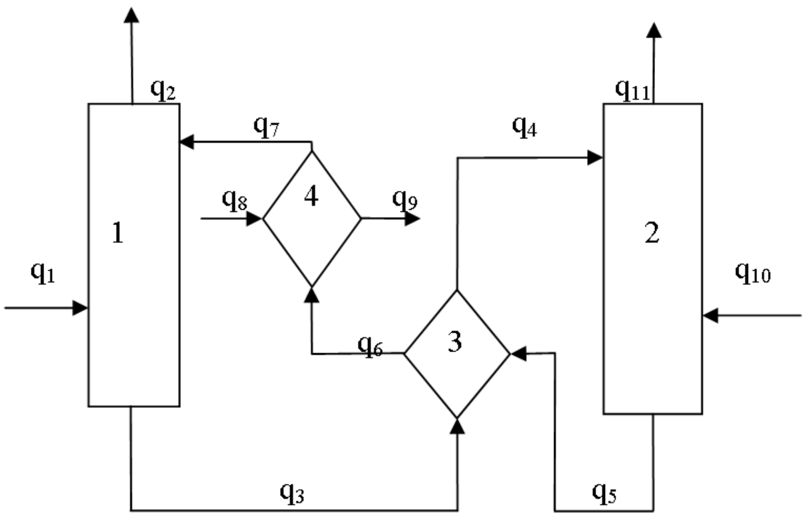


Рис. 2. Технологическая схема адсорбционно-десорбционного процесса:

1 — абсорбер; 2 — десорбер; 3 — теплообменник; 4 — холодильник.

$q_1$ — газ на абсорбцию; $q_2$ — очищенный газ; $q_3$, $q_4$ — насыщенный абсорбент; $q_5$, $q_6$, $q_7$ — регенерированный абсорбент; $q_8$, $q_9$ — хладагент; $q_{10}$ — пар; $q_{11}$ — пар + газ.

## Структурная схема

На основе технологической схемы построим структурную схему процесса. Аппараты в такой схеме изображают прямоугольниками, которые, по необходимости, располагают либо по горизонтали, либо по вертикали, либо, в случае сложной схемы, друг под другом.

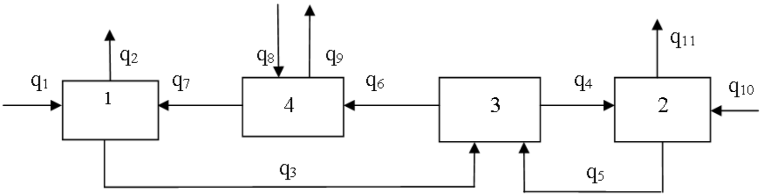


Рис. 3. Структурная схема процесса

## Топологическая схема
### (*топологический граф*)

В топологической схеме аппараты изображают жирной точкой (вершиной), а потоки — линией или дугой.

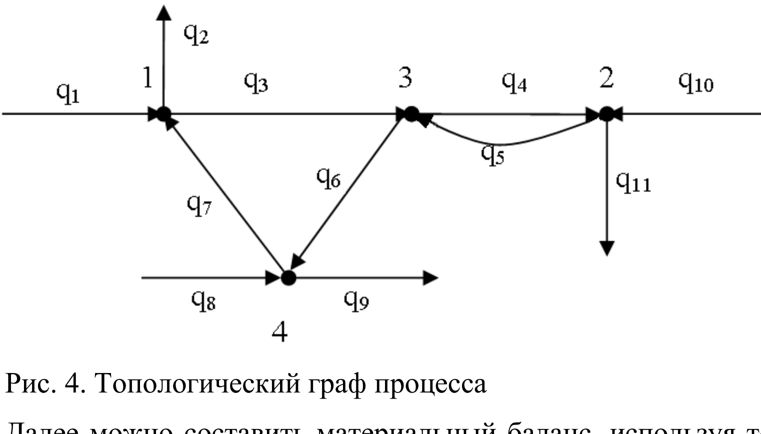


Рис. 4. Топологический граф процесса

Далее можно составить материальный баланс, используя топологический граф.

Составим матрицу инциденций, для чего сначала введем числовой код $[S_{ij}]$, где $i$ — номер строки (аппараты); $j$ —, номер столбца (потоки).

$$S_{ij} = \begin{cases} -1, \text{ если дуга } q_j \text{ выходит из вершины } i\text{-го типа} \\ +1, \text{ если дуга } q_j \text{ входит в вершину } i\text{-го типа} \\ 0, \text{ если дуга } q_j \text{ не инцидентна вершине i-го типа*.} \end{cases}$$

*Не входит в вершину и не выходит из неё.

Матрица инциденций

| | i/j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | +1 | –1 | –1 | 0 | 0 | 0 | +1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $S_{ij}$ = | 2 | 0 | 0 | 0 | +1 | –1 | 0 | 0 | 0 | 0 | +1 | –1 |
| | 3 | 0 | 0 | +1 | –1 | +1 | –1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | +1 | –1 | +1 | –1 | 0 | 0 |

Составим материальный баланс с помощью матрицы инциденций и матрицы расхода.

Введем обозначения:

$m_j$ — массовый расход $j$-го потока;

$x_{kj}$ — массовая концентрация $k$-го компонента в $j$-м потоке;

$m_j{*}x_{kj}$ — массовый расход $k$ -го компонента в $j$-м потоке,

где $k$ — номер компонента.

Построим матрицу покомпонентного состава потока (матрицу расхода). Пусть число компонентов в каждом потоке $k$ = 3.

Матрица расходов

| | i/j | 1 | 2 | 3 | … | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | $m_1x_{11}$ | $m_2x_{12}$ | $m_3x_{13}$ | … | $m_8x_{18}$ | $m_9x_{19}$ |
| $[M_jX_{kj}]$ = | 2 | $m_1x_{21}$ | $m_2x_{22}$ | $m_3x_{23}$ | … | $m_8x_{28}$ | $m_9x_{29}$ |
| | 3 | $m_1x_{31}$ | $m_2x_{32}$ | $m_3x_{33}$ | … | $m_8x_{38}$ | $m_9x_{39}$ |

Теперь у нас есть две матрицы: инциденций и расходов. Составим материальный баланс для первого аппарата и первого компонента, участвующего в потоке. Перемножим соответствующие строки матриц, затем сложим элементы матрицы, приравняем сумму нулю и таким образом получим материальный баланс.

Для $i = 1$ и $k = 1$, т.е. первого аппарата и первого компонента получим:

$$\mathbf{[S_{\mathit{ij}}]*[M_{\mathit{j}}X_{\mathit{kj}}]} = [m_1x_{11} - m_2x_{12} - m_3x_{13} + m_7x_{17}] = 0.$$

## Библиографический список


1. Шатихин Л.Г. Структурные матрицы и их применение для исследования систем. — М.: Машиностроение, 1974. —248с.

2. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. — М.: Мир, 1999. —548с.

## З А Д А Н И Е

Построить структурную схему и топологический граф для ХТС производства промышленного этилового спирта из этилена (схема задана).

Составить матрицу инциденций и показать ее применение на примере составления материального баланса для аппарата ***a*** = и компонента ***k*** = .

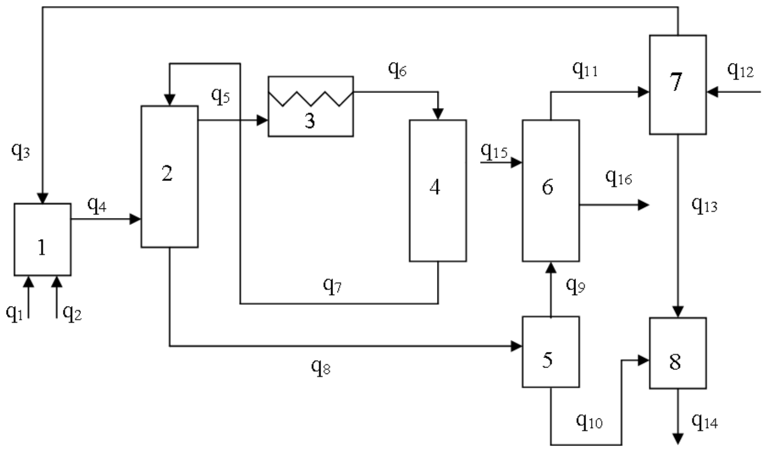


Рис. 5. Схема получения этилового спирта из этилена:

1 — смеситель; 2 — трубчатый теплообменник; 3 — трубчатая печь; 4 — реактор; 5 — сборный сепаратор;6 — холодильник;7 — абсорбер;8 — дополнительный сборник.

$q_1$ — этилен; $q_2$ —вода; $q_3$ —циркулирующий поток; $q_4$ , $q_5$ — газовая смесь; $q_6$ — парогазовая смесь; $q_7$, $q_8$ — реакционная смесь; $q_9$, $q_{11}$ — газовая фаза; $q_{10}$ — жидкая фаза; $q_{12}$ —абсорбент; $q_{13}$, $q_{14}$ — водный спирт; $q_{15}$, $q_{16}$ — охлаждающая вода.

## Варианты заданий

| Номер варианта | Номер аппарата | Номер компонента |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1 |
| 3 | 3 | 2 |
| 4 | 4 | 3 |
| 5 | 5 | 1 |
| 6 | 6 | 3 |
| 7 | 7 | 2 |
| 8 | 8 | 2 |
| 9 | 1 | 2 |
| 10 | 2 | 2 |
| 11 | 3 | 1 |
| 12 | 4 | 1 |
| 13 | 5 | 3 |
| 14 | 6 | 2 |
| 15 | 7 | 1 |
| 16 | 8 | 1 |
| 17 | 1 | 3 |
| 18 | 2 | 3 |
| 19 | 3 | 3 |
| 20 | 4 | 2 |
| 21 | 5 | 2 |
| 22 | 6 | 1 |
| 23 | 7 | 2 |
| 24 | 8 | 1 |
| 25 | 2 | 3 |

## Моделирование методом «черного ящика»

*Модель* — представление объекта, системы или понятия (идеи) в некоторой форме, отличной от формы их реального существования.

*Моделирование* — косвенный метод исследования не самого объекта, а его модели.

Различают физическое и математическое моделирование.

*Физическое моделирование*. Изменяется масштаб объекта, но сохраняется его природа. Характеризующие объект качественные и количественные связи устанавливаются в виде критериальных соотношений. Основой физического моделирования является *теория подобия*, рассмотренная ранее.

*Математическое моделирование.* Для воспроизведения свойств исследуемого объекта, используют его математическое описание, устанавливающее связи между входными и выходными параметры объекта как системы.

По способу построения математические модели делят на *экспериментально-статистические, аналитические и смешанные*.

В основе экспериментально-статистических математических моделей лежит эксперимент. К этому виду относится и моделирование методом «чёрного ящика»[1].

Аналитические математические модели основаны на теоретических положениях, законах естественных наук. Сюда относится моделирования методом «серого ящика».

Смешанными считают, например, математические модели на основе $\pi$-теоремы и метода анализа размерностей.

---

[1] Термин, употребляемый главным образом в системотехнике для обозначения систем, структура и внутренние процессы которых неизвестны или очень сложны; метод изучения таких систем основан на исследовании их реакций (изменений выходных сигналов) на известные (заданные) входные воздействия (сигналы).

### Понятие «чёрный ящик»

Математической моделью, полученной методом «чёрного ящика», называют совокупность математических выражений, связывающих входные и выходные параметры системы. Как правило, входные параметры, называемые *факторами*, задаются или известны, а выходные (*отклик*) определяются в результате эксперимента.

Различают *пассивный и активный эксперименты*. При проведении пассивного эксперимента значения факторов не зависят от экспериментатора и принимаются такими, какими они наблюдаются в опыте.

Активный эксперимент отличается заданием значений факторов согласно плану проведения эксперимента.

### Основные этапы построения математической модели методом «чёрного ящика»

1. Изучение системы; выделение входных и выходных величин

Рассмотрим систему, связанную с окружающей средой посредством входных (неуправляемых и управляемых) и выходных параметров.

Из множества связей системы с окружающей средой, исходя из того, что известно об объекте, выбирают входные параметры $x_i$. При проведении эксперимента измеряют значения выходных параметров $y_i$ (или одного параметра — *критерия*, который часто называют целевой функцией $Y$), также выбранных, исходя из целей исследования.

2. Задание структуры математической модели

На втором этапе постулируется вид математической связи (оператор связи) между входными и выходными величинами с определением вида уравнения для описания зависимости.

В общем случае уравнение имеет вид

$$Y = f(x_i, A), \tag{14}$$

где $A$ — параметры математической модели,
$i = 1, \ldots, k$.

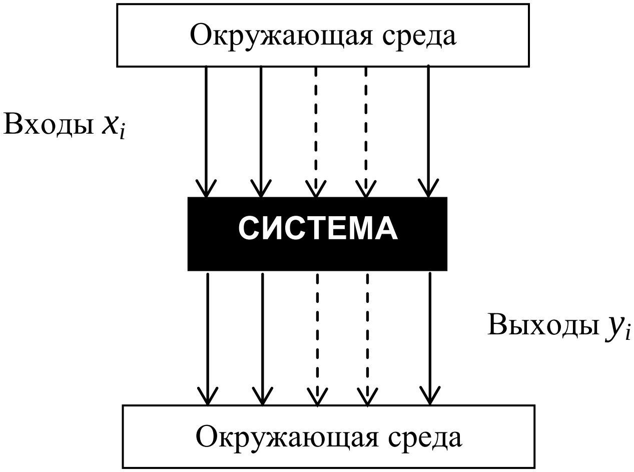


Рис.6. Система как «чёрный ящик»

3. Нахождение параметров математической модели

После нахождения коэффициентов уравнения проводят статистический (регрессионный) анализ результатов.

Как правило, экспериментальные данные описывают уравнением регрессии, например, полиномом вида

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_ix_i^2. \qquad (15)$$

Линия, проходящая через средние значения выходной величины, называется регрессионной кривой или *линией регрессии*.

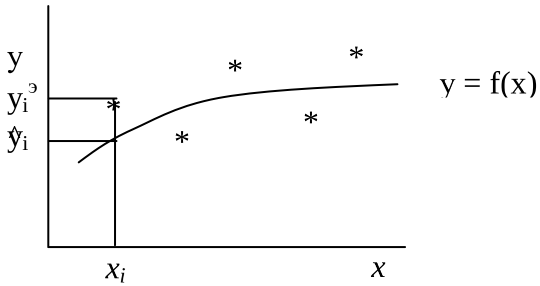


Рис. 7. Построение линии регрессии

При нахождении коэффициентов уравнения регрессии, как правило, применяют *метод наименьших квадратов*. Коэффициенты подбирают таким образом, чтобы отклонение значений выходных(экспериментальных) величин ($y_i$) и величин ($\hat{y}$), рассчитанных по уравнению регрессии, было минимальным.

4. Проверка адекватности математической модели

*Адекватность* — это соответствие данных, рассчитанных по математической модели, экспериментальным данным.

Адекватность уравнения проверяют по статистическому *критерию Фишера*:

$$F = \frac{\sigma^2_{\text{ад}}}{\sigma^2_{\text{воспр}}}, \qquad (16)$$

где $\sigma^2_{\text{ад}}$ — дисперсия адекватности, $\sigma^2_{\text{воспр}}$ — дисперсия воспроизводимости.

Дисперсия адекватности оценивает точность математической модели, а дисперсия воспроизводимости характеризует разброс выходных величин при одинаковых значениях входных, т. е. точность проведения эксперимента.

Для определения $\sigma^2_{\text{воспр}}$ обязательным условием является проведение параллельных опытов. Распределение Фишера характеризуется двумя параметрами — числами степеней свободы:

$$f_1 = f_{\text{ад}} = n - 1, \quad f_2 = f_{\text{воспр}} = m - 1,$$

где $n$ – число коэффициентов в уравнении регрессии, $m$ – число параллельных опытов.

Если $F$ будет меньше табличного значения $F_{1-p}(f_1, f_2)$ для выбранного уровня значимости $p$, т. е. вероятности попадания в критическую область (область маловероятных значений случайной величины) данного распределения для чисел степеней свободы $f_1$ и $f_2$, то уравнение адекватно эксперименту.

Величина $p$ показывает, какова вероятность того, что модель может быть отнесена к разряду неадекватных, а величина $1 - p$ представляет собой вероятность, с которой уравнение можно считать адекватным эксперименту.

Если математическая модель неадекватна, то либо меняют её структуру, либо проводят дополнительные эксперименты (расширение базы экспериментальных данных).

5. Проверка значимости параметров математической модели.

Для проверки значимости параметров модели применяют критерий Стьюдента. При соответствующих степенях свободы с помощью таблицы определяют критическое значение параметра и сопоставляют с известным значением. Параметр считается значимым, если его значение больше табличного или равно ему. Если один или несколько параметров незначимы, то их исключают из уравнения, и остальные параметры пересчитывают заново (переход к п. 3). Если все параметры значимы, то построение математической модели завершено.

В дальнейшем проводят адаптацию модели, т.е. подстройку её параметров с целью повышения адекватности.

Построение модели методом «чёрного ящика» применяют при анализе сложных систем, когда невозможно установить их внутренние связи. Понятие «чёрный ящик» помогает также при изучении поведения систем, т.е. их реакций на различные внешние воздействия, абстрагироваться от их внутреннего устройства. Многие системы, особенно большие, оказываются настолько сложными, что, даже имея полную информацию о состоянии их элементов, практически невозможно связать её с поведением системы в целом. В подобных случаях представление такой сложной системы в виде некоторого «чёрного ящика», функционирующего аналогично, облегчает построение упрощенной модели. Анализируя поведение модели и сравнивая его с поведением системы, можно сделать ряд выводов о свойствах самой системы и при их совпадении со свойствами модели выбрать рабочую гипотезу о предполагаемом строении исследуемой системы.

Метод «чёрного ящика» также весьма полезен при замене одной системы другой, функционирующей аналогичным образом. Модель в виде «чёрного ящика» в ряде случаев оказывается единственно применимой при изучении некоторых систем. Это относится к таким исследованиям, в результате которых нужно получить данные о системе в обычной для неё обстановке.

К моделированию методом «чёрного ящика» относится и экспериментально-статистический метод построения математической модели. В основе данного метода лежит проведение большого числа экспериментов с последующей статистической обработкой их результатов. Достоинства метода: простота математической модели и процесса её получения, точность, универсальность метода построения. Недостатки: математическая модель применима только для той системы, на которой проводился эксперимент, и ограниченная область варьирования параметров.

Экспериментально-статистические методы построения математических моделей подразделяют как по виду моделей (динамические и статические), так и по способу сбора экспериментальных данных (на основе пассивного или активного эксперимента).

В активном эксперименте одновременно варьируются все факторы, как правило, на двух уровнях (верхнем $z_i^{\max}$ и нижнем $z_i^{\min}$) относительно некоторого уровня $z_i^0$, называемого основным или нулевым. Интервал варьирования определяют по выражению

$$\Delta z_i = \frac{z_i^{\max} - z_i^{\min}}{2} . \qquad (17)$$

При переходе к безразмерной системе координат проводим следующее преобразование:

$$X = \frac{z_i - z_i^0}{\Delta z_i} . \qquad (18)$$

Обозначения уровней:

+1 — основной, 0 — нулевой, –1 — нижний.

Критические значения критериев Стьюдента и Фишера представлены в приложениях 1, 2.

## ЗАДАНИЕ

Известно, что на эффективность обезвреживания нефтесодержащих отходов влияют три основных фактора. Необходимо определить коэффициенты уравнения регрессии и оценить степень влияния факторов на целевую функцию. Матрица планирования приведена в табл.3, а экспериментальные данные — в табл.4. В каждом эксперименте проведено три параллельных опыта.

Таблица 3

Матрица планирования

| Номер опыта | $X_0$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_1X_2$ | $X_1X_3$ | $X_2X_3$ | $X_1X_2X_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 |
| 2 | +1 | –1 | +1 | +1 | –1 | –1 | +1 | –1 |
| 3 | +1 | +1 | –1 | +1 | –1 | +1 | –1 | –1 |
| 4 | +1 | –1 | –1 | +1 | +1 | –1 | –1 | +1 |
| 5 | +1 | +1 | +1 | –1 | +1 | –1 | –1 | –1 |
| 6 | +1 | –1 | +1 | –1 | –1 | +1 | –1 | +1 |
| 7 | +1 | +1 | –1 | –1 | –1 | –1 | +1 | +1 |
| 8 | +1 | –1 | –1 | –1 | +1 | +1 | +1 | –1 |

## РЕШЕНИЕ

1. Вычислим среднее значение параметра $\bar{y}_j$

$$\bar{y}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

и дисперсию опыта $S_j^2$

$$S_j^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum (y_{ij} - \bar{y}_j)^2 ,$$

де $n$ — число параллельных опытов.

Для некоторого опыта под номером 1 в серии из 8 опытов получим

$$\bar{y}_1 = \frac{16,4+16,5+16,6}{3} = 16,5,$$

$$S_1^2 = \frac{1}{3-1}[(16,4-16,5)^2 + (16,5-16,5)^2 +$$
$$+(16,6-1,5)^2] = 0,01.$$

Таблица 4

Полученные результаты

| Номер опыта | $y_{1i}$ | $y_{2i}$ | $y_{3i}$ | $\bar{y}_i$ | $S_j^2$ | $\hat{y}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 16,40 | 16,50 | 16,60 | 16,50 | 0,01 | 16,50 |
| 2 | 4,30 | 4,40 | 4,60 | 4,43 | 0,023 | 4,50 |
| 3 | 20,40 | 20,50 | 20,60 | 20,50 | 0,01 | 20,45 |
| 4 | 12,50 | 12,60 | 12,70 | 12,60 | 0,01 | 12,50 |
| 5 | 19,30 | 19,50 | 19,70 | 10,50 | 0,04 | 19,49 |
| 6 | 7,40 | 7,60 | 7,70 | 7,56 | 0,023 | 7,49 |
| 7 | 23,30 | 23,40 | 23,50 | 23,40 | 0,01 | 23,44 |
| 8 | 15,30 | 15,50 | 15,70 | 15,50 | 0,04 | 15,54 |
| $\sum$ | | | | | 0,166 | |

2. Определим принадлежность рассчитанных дисперсий одной генеральной совокупности, для чего найдем значение критерия Кохрена G и сравним его с табличным, определенным для $\alpha$ =0,05, $N$ =8, $f$ = 2, где $N$ – число опытов.

$$\mathrm{G} = \frac{S_{\max}^2}{\sum_{i=1}^{m} S_i^2} = \frac{0,04}{0,166} = 0,24; \qquad \mathrm{G}_{\text{табл}} = 0,477\,5.$$

3. Определим дисперсию воспроизводимости

$$S_{\hat{a}}^2 = \sum_{i=1}^{N} S_i^2 \cdot \frac{f}{f_{\text{В}}},$$

где $f = (n - 1) = 2$, $f_{\text{В}} = N(n - 1) = 16$.

4. Вычислим коэффициенты уравнения по следующей формуле:

$$b_i = \frac{\sum X_i \cdot \bar{Y}_i}{N}.$$

Например,

$$b_1 = \frac{1}{8}(16,5 - 4,43 + 20,5 - 12,6 + 19,5 -$$
$$-7,56 + 23,4 - 15,5) = 4,97.$$

Аналогично вычислим коэффициенты $b_0$ (15,00), $b_2$ (–3,00), $b_3$ (–1,49), $b_{12}$ (1,07), $b_{13}$ (0,016), $b_{23}$ (0,041), $b_{123}$ (0,016 6) и определим их значимость по критерию Стьюдента ($t$). Коэффициенты значимы, если выполняется условие:

$$|b_i| \succ t \cdot S_b \frac{1}{\sqrt{N \cdot (n-1)}}, \quad t_{\text{табл}} = 2{,}12, \text{ для } f_B = 16.$$

После исключения из уравнения незначимых коэффициентов получим следующее уравнение

$$Y = 15{,}00 + 4{,}97\,X_1 - 3{,}00\,X_2 - 1{,}49\,X_3 + 1.07\,X_{12}.$$

Положительный (отрицательный) знак коэффициента означает, что при возрастании данного параметра увеличивается (уменьшается) и целевая функция.

Рассчитываем значения $\hat{y}$ и вносим их в табл.4.

Определяем дисперсию адекватности

$$S^2_{\text{àäåêâ}} = \frac{\sum(\bar{y}_i - y)^2}{N - L} = \frac{0{,}183}{8-5} = 0{,}061,$$

где $L$ — число значимых коэффициентов в уравнении регрессии.

Находим значение критерия Фишера

$$F = \frac{S_{\text{адекв}}}{S^2_{\text{в}}} = \frac{0{,}061}{0{,}0208} = 2{,}93$$

и сравниваем его с табличным (приложение 1), определенным при $f_2^* = 16$ и числе степеней свободы, равном 3.

Если $F \le F_{\text{табл}}$ (как в данном примере), то уравнение адекватно описывает эксперимент.

Следует отметить, что все вычисленные коэффициенты уравнения были определены при условии первоначального их выражения в кодированной (безразмерной) форме и для того, чтобы получить с помощью уравнения значения целевой функции в натуральных единицах измерения, необходимо использовать натуральный масштаб.

# Варианты исходных данных к заданиям

| | Значения $Y_{1,2,3}$ | Номер опыта | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| I | $Y_1$ | 18,2 | 14,6 | 17,4 | 4,3 | 7,8 | 3,2 | 11,5 | 2,8 |
| | $Y_2$ | 18,4 | 14,0 | 17,2 | 4,2 | 7,9 | 3,0 | 11,4 | 2,9 |
| | $Y_3$ | 18,1 | 13,1 | 17,0 | 4,1 | 8,5 | 3,8 | 11,2 | 2,8 |
| II | $Y_1$ | 14,2 | 12,7 | 15,3 | 11,5 | 2,2 | 17,4 | 14,7 | 3,6 |
| | $Y_2$ | 14,6 | 12,1 | 15,8 | 11,4 | 2,3 | 17,2 | 15,2 | 3,5 |
| | $Y_3$ | 14,0 | 11,8 | 15,9 | 11,2 | 2,5 | 17,0 | 14,8 | 3,9 |
| III | $Y_1$ | 13,1 | 15,4 | 14,5 | 14,7 | 1,8 | 15,3 | 12,3 | 18,0 |
| | $Y_2$ | 12,7 | 16,5 | 15,9 | 15,2 | 1,9 | 15,8 | 12,4 | 17,4 |
| | $Y_3$ | 12,2 | 16,5 | 15,2 | 16,0 | 1,7 | 15,9 | 12,8 | 17,2 |
| IV | $Y_1$ | 9,6 | 17,2 | 14,6 | 12,3 | 3,6 | 14,5 | 12,8 | 15,2 |
| | $Y_2$ | 9,4 | 17,5 | 14,0 | 12,4 | 3,5 | 15,9 | 12,9 | 15,3 |
| | $Y_3$ | 9,0 | 17,8 | 13,1 | 12,8 | 3,0 | 15,2 | 12,0 | 15,8 |
| V | $Y_1$ | 17,4 | 12,3 | 12,7 | 12,8 | 2,5 | 14,6 | 11,4 | 15,9 |
| | $Y_2$ | 17,2 | 12,1 | 12,1 | 12,9 | 2,2 | 14,0 | 11,5 | 14,5 |
| | $Y_3$ | 17,0 | 12,0 | 11,8 | 12 | 2,0 | 13,1 | 11,9 | 15,9 |
| VI | $Y_1$ | 15,3 | 11,5 | 15,4 | 11,4 | 4,2 | 12,7 | 8,5 | 15,2 |
| | $Y_2$ | 15,8 | 11,4 | 16,5 | 11,5 | 4,5 | 12,1 | 8,6 | 14,6 |
| | $Y_3$ | 15,9 | 11,2 | 16,5 | 11,9 | 4,8 | 11,8 | \8,0 | 14,0 |
| VII | $Y_1$ | 14,5 | 14,7 | 17,2 | 2,3 | 5,6 | 15,4 | 7,4 | 13,1 |
| | $Y_2$ | 15,9 | 15,2 | 17,5 | 2,5 | 5,8 | 16,5 | 7,1 | 12,7 |
| | $Y_3$ | 15,2 | 16,0 | 17,8 | 3,2 | 5,4 | 16,5 | 7,0 | 12,1 |
| VIII | $Y_1$ | 14,6 | 12,3 | 12,3 | 3,1 | 8,1 | 17,2 | 11,5 | 15,8 |
| | $Y_2$ | 14,0 | 12,4 | 12,1 | 3,3 | 8,2 | 17,5 | 11,4 | 15,4 |
| | $Y_3$ | 13,1 | 12,8 | 12,0 | 2,2 | 8 | 17,8 | 11,2 | 16,5 |
| IX | $Y_1$ | 12,7 | 12,8 | 3,6 | 2,3 | 17,4 | 12,3 | 14,7 | 16,5 |
| | $Y_2$ | 12,1 | 12,9 | 3,5 | 2,8 | 17,2 | 12,1 | 15,2 | 17,2 |
| | $Y_3$ | 11,8 | 12,0 | 3,0 | 3,1 | 17,0 | 12,0 | 16,0 | 17,5 |
| X | $Y_1$ | 15,4 | 11,4 | 2,4 | 2,6 | 15,3 | 3,2 | 12,3 | 12,8 |
| | $Y_2$ | 16,5 | 11,5 | 2,8 | 2,5 | 15,8 | 3,1 | 12,4 | 12,3 |
| | $Y_3$ | 16,5 | 11,9 | 2,9 | 2,8 | 15,9 | 3,3 | 12,8 | 12,1 |
| XI | $Y_1$ | 17,2 | 18,3 | 3,2 | 17,4 | 14,5 | 2,2 | 12,8 | 2,8 |
| | $Y_2$ | 17,5 | 18,4 | 3,1 | 17,2 | 15,9 | 2,3 | 12,9 | 3,2 |
| | $Y_3$ | 17,8 | 18,0 | 3,3 | 17,0 | 15,2 | 2,8 | 12 | 3,1 |

|  | Значения $Y_{1,2,3}$ | Номер опыта | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|  |  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| XII | $Y_1$ | 12,3 | 17,5 | 2,2 | 15,3 | 14,6 | 3,1 | 11,4 | 3,3 |
|  | $Y_2$ | 12,1 | 17,1 | 2,3 | 15,8 | 14,0 | 2,6 | 11,5 | 2,2 |
|  | $Y_3$ | 12,0 | 17,0 | 2,8 | 15,9 | 13,1 | 2,5 | 11,9 | 2,3 |
| XIII | $Y_1$ | 11,5 | 12,3 | 3,1 | 14,5 | 12,7 | 17,4 | 14,3 | 2,8 |
|  | $Y_2$ | 11,4 | 12,5 | 2,6 | 15,9 | 12,1 | 17,2 | 14,5 | 3,1 |
|  | $Y_3$ | 11,2 | 12,4 | 2,5 | 15,2 | 11,8 | 17,0 | 14,0 | 2,6 |
| XIV | $Y_1$ | 14,7 | 3,2 | 1,8 | 14,6 | 15,4 | 15,3 | 7,8 | 2,5 |
|  | $Y_2$ | 15,2 | 3,1 | 1,9 | 14,0 | 16,5 | 15,8 | 7,9 | 3,2 |
|  | $Y_3$ | 16,0 | 3,3 | 2,2 | 13,1 | 16,5 | 15,9 | 7,8 | 3,1 |
| XV | $Y_1$ | 12,3 | 2,2 | 11,5 | 12,7 | 17,2 | 14,5 | 11,5 | 3,3 |
|  | $Y_2$ | 12,4 | 2,3 | 11,4 | 12,1 | 17,5 | 15,9 | 11,4 | 2,2 |
|  | $Y_3$ | 12,8 | 2,8 | 11,2 | 11,8 | 17,8 | 15,2 | 11,2 | 2,3 |
| XVI | $Y_1$ | 12,8 | 3,1 | 14,7 | 15,4 | 12,3 | 14,6 | 14,7 | 2,8 |
|  | $Y_2$ | 12,9 | 2,6 | 15,2 | 16,5 | 12,1 | 14,0 | 15,2 | 3,1 |
|  | $Y_3$ | 12 | 2,5 | 16,0 | 16,5 | 12,0 | 13,1 | 16,0 | 2,6 |
| XVII | $Y_1$ | 11,4 | 3,2 | 12,3 | 17,2 | 3,2 | 12,7 | 12,3 | 2,5 |
|  | $Y_2$ | 11,5 | 3,1 | 12,4 | 17,5 | 3,1 | 12,1 | 12,4 | 3,2 |
|  | $Y_3$ | 11,9 | 3,3 | 12,8 | 17,8 | 3,3 | 11,8 | 12,8 | 3,1 |
| XVIII | $Y_1$ | 18,3 | 2,2 | 12,8 | 12,3 | 2,2 | 15,4 | 12,8 | 3,3 |
|  | $Y_2$ | 18,4 | 2,3 | 12,9 | 12,1 | 2,3 | 16,5 | 12,9 | 2,2 |
|  | $Y_3$ | 18,0 | 2,8 | 12 | 12,0 | 2,8 | 16,5 | 12 | 2,3 |
| XIX | $Y_1$ | 17,5 | 3,1 | 11,4 | 11,4 | 3,1 | 17,2 | 11,4 | 2,8 |
|  | $Y_2$ | 17,1 | 2,6 | 11,5 | 11,5 | 2,6 | 17,5 | 11,5 | 3,1 |
|  | $Y_3$ | 17,0 | 2,5 | 11,9 | 11,0 | 2,5 | 17,8 | 11,9 | 2,6 |
| XX | $Y_1$ | 12,3 | 2,9 | 8,5 | 10,8 | 3,2 | 12,3 | 8,9 | 2,5 |
|  | $Y_2$ | 12,5 | 3,2 | 8,6 | 10,5 | 2,5 | 12,1 | 7,4 | 2,5 |
|  | $Y_3$ | 12,4 | 3,3 | 8,2 | 10,4 | 2,8 | 12,0 | 7,2 | 2,1 |

## Библиографический список

1. Кафаров В.В. Методы кибернетики в химии и химической технологии. — М.: Химия, 1976. —464с.

2. Бондарь А.Г. Математическое моделирование в химической технологии. — Киев: Вища школа, 1973. —280 с.

## Значения критерия Фишера

| $f_2$* | Число степеней свободы | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 161,4 | 199,5 | 215,7 | 224,6 | 230,2 | 234,0 |
| 2 | 18,51 | 19,00 | 19,16 | 19,25 | 19,30 | 19,33 |
| 3 | 10,13 | 9,55 | 9,28 | 9,12 | 9,01 | 8,94 |
| 4 | 7,71 | 6,94 | 6,59 | 6,39 | 6,26 | 6,16 |
| 5 | 6,61 | 5,79 | 5,41 | 5,19 | 5,05 | 4,95 |
| 6 | 5,99 | 5,14 | 4,76 | 4,53 | 4,39 | 4,28 |
| 7 | 5,59 | 4,74 | 4,35 | 4,12 | 3,97 | 3,87 |
| 8 | 5,32 | 4,46 | 4,07 | 3,84 | 3,69 | 3,58 |
| 9 | 5,12 | 4,26 | 3,86 | 3,63 | 3,48 | 3,37 |
| 10 | 4,96 | 4,10 | 3,71 | 3,48 | 3,33 | 3,22 |
| 11 | 4,84 | 3,98 | 3,59 | 3,36 | 3,20 | 3,09 |
| 12 | 4,75 | 3,88 | 3,49 | 3,26 | 3,11 | 3,00 |
| 13 | 4,67 | 3,80 | 3,41 | 3,18 | 3,02 | 2,92 |
| 14 | 4,60 | 3,74 | 3,34 | 3,11 | 2,96 | 2,85 |
| 15 | 4,54 | 3,68 | 3,29 | 3,06 | 2,90 | 2,79 |
| 16 | 4,49 | 3,63 | 3,24 | 3,01 | 2,85 | 2,74 |
| 20 | 4,35 | 3,49 | 3,10 | 2,87 | 2,71 | 2,60 |
| 30 | 4,17 | 3,32 | 2,92 | 2,69 | 2,53 | 2,42 |
| 40 | 4,08 | 3,23 | 2,84 | 2,61 | 2,45 | 2,34 |
| 50 | 4,03 | 3,18 | 2,79 | 2,56 | 2,40 | 2,29 |
| 100 | 3,94 | 3,09 | 2,70 | 2,46 | 2,30 | 2,19 |
| ∞ | 3,84 | 2,99 | 2,60 | 2,37 | 2,21 | 2,09 |

*$f_2$ — число степеней свободы для меньшей дисперсии

**для уровня значимости $\alpha$ = 0,05**

$f_1$ для большей дисперсии

| 8 | 12 | 16 | 24 | 50 | 100 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 238,9 | 243,9 | 246,5 | 249,0 | 251,8 | 253,3 | 254,0 |
| 19,37 | 19,41 | 19,43 | 19,45 | 19,47 | 19,49 | 19,50 |
| 8,84 | 8,74 | 8,69 | 8,64 | 8,58 | 8,56 | 8,53 |
| 6,04 | 5,91 | 5,84 | 5,77 | 5,70 | 5,66 | 5,63 |
| 4,82 | 4,68 | 4,60 | 4,53 | 4,44 | 4,40 | 4,36 |
| 4,15 | 4,00 | 3,92 | 3,84 | 3,75 | 3,71 | 3,67 |
| 3,73 | 3,57 | 3,49 | 3,41 | 3,32 | 3,28 | 3,23 |
| 3,44 | 3,28 | 3,20 | 3,12 | 3,03 | 2,98 | 2,93 |
| 3,23 | 3,07 | 2,98 | 2,90 | 2,80 | 2,76 | 2,71 |
| 3,07 | 2,91 | 2,82 | 2,74 | 2,64 | 2,59 | 2,54 |
| 2,95 | 2,79 | 2,70 | 2,61 | 2,50 | 2,45 | 2,40 |
| 2,85 | 2,69 | 2,60 | 2,50 | 2,40 | 2,35 | 2,30 |
| 2,77 | 2,60 | 2,51 | 2,42 | 2,32 | 2,26 | 2,21 |
| 2,70 | 2,53 | 2,44 | 2,35 | 2,24 | 2,19 | 2,13 |
| 2,64 | 2,48 | 2,39 | 2,29 | 2,18 | 2,12 | 2,07 |
| 2,59 | 2,42 | 2,33 | 2,24 | 2,13 | 2,07 | 2,01 |
| 2,45 | 2,28 | 2,28 | 2,08 | 1,96 | 1,90 | 1,84 |
| 2,27 | 2,09 | 1,99 | 1,89 | 1,76 | 1,69 | 1,62 |
| 2,18 | 2,00 | 1,90 | 1,79 | 1,66 | 1,59 | 1,51 |
| 2,13 | 1,95 | 1,85 | 1,74 | 1,60 | 1,52 | 1,44 |
| 2,03 | 1,85 | 1,75 | 1,63 | 1,48 | 1,39 | 1,28 |
| 1,94 | 1,75 | 1,64 | 1,52 | 1,35 | 1,24 | 1,00 |